Řešení teoretických úloh 21.12.

pátek 31. prosince 2021 1:38

1d pro $f \in X$ platí

(i)

$$D_h F(f) = \lim_{t \to 0} \frac{F(f+th) - F(f)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(1) + th(1) - f(1)}{h} = h(1)$$

$$D_h G(f) = \lim_{t \to 0} \frac{G(f+th) - G(f)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(5) + th(5) - f(5)}{t} = h(5)$$

(ii)

$$D_h H(f) = \lim_{t \to 0} \frac{H(f+th) - H(f)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{[f(1) + th(1)] \cdot [f(5) + th(5)] - f(1) f(5)}{t}$$

$$= \lim_{t \to 0} f(1) h(5) + h(1) f(5) + t h(1) h(5) = f(1) h(5) + h(1) f(5)$$

$$= F(f) \cdot D_h G(f) + D_h F(f) G(f)$$

Tvrzení tedy platí.

2b

(i) volme $\xi \in (-3,4)$ a $\delta > 0$, aby $(\xi-\delta, \xi+\delta) \subset (-3,4)$, potom

$a_n \rightrightarrows a$ na $(-3,4)$

$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall x \in (-3,4) \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n(x) - a(x)| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall x \in (\xi-\delta, \xi+\delta) \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n(x) - a(x)| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow a_n \rightrightarrows a$ na $(\xi-\delta, \xi+\delta)$.

Tvrzení tedy platí

(ii) volme $a_n(x) = \dfrac{1}{n(x-4)}$ a $\xi \in (-3,4)$.

Potom $|a_n(x)| \leq \dfrac{1}{n(\xi-4)}$ $\quad x \in (-3,\xi]$

Tedy $a_n \rightrightarrows 0$ na $(-3,\xi]$ pro všechna ξ a tedy

i $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} 0$ na $(-3,4)$. Na druhou stranu

$\sup\limits_{x \in (-3,4)} |a_n(x)| = +\infty$ a tedy neplatí $a_n \rightrightarrows 0$ na $(-3,4)$

Tvrzení tedy neplatí

(iii) volme $\varepsilon > 0$

$a_n \rightrightarrows a$ na $(-3,1)$

$\Rightarrow \exists N_1 \in \mathbb{N}\ \forall x \in (-3,1)\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_1 : |a_n(x) - a(x)| < \varepsilon$

$a_n \rightrightarrows a$ na $(1,4)$

$\Rightarrow \exists N_2 \in \mathbb{N}\ \forall x \in (1,4)\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_2 : |a_n(x) - a(x)| < \varepsilon$

$a_n \to a$ na $(-3,4) \Rightarrow a_n(1) \to a(1)$

$\Rightarrow \exists N_3 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N_3 : |a_n(1) - a(1)| < \varepsilon$

Pro $N = \max(N_1, N_2, N_3)$ tedy platí

$$\forall x \in \underbrace{(-3,1) \cup \{1\} \cup (1,4)}_{= (-3,4)}\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : |a_n(x) - a(x)| < \varepsilon$$

Dostáváme tedy $a_n \rightrightarrows a$ na $(-3,4)$ a tvrzení tedy platí.

(iv) volme $$a_n(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-3,1] \\ \frac{1}{n(x-1)} & x \in (1,4) \end{cases}$$

a $$a(x) = 0 \quad x \in (-3,4).$$

Zjevně $a_n \to a$ na $(-3,4)$

$a_n \rightrightarrows a$ na $(-3,1)$

a podobně jako v (ii) $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} a$ na $(1,4)$

Dále (podobně jako v (ii)) víme, že $a_n \rightrightarrows a$ na $[\xi, 4)$ pro libovolné $\xi > 1$. Pokud by tedy $a_n \overset{loc}{\rightrightarrows} a$ na $(-3,4)$ muselo by existovat $\delta > 0$, že $a_n \rightrightarrows a$ na $(1-\delta, 1+\delta)$.

Pak ale $a_n \rightrightarrows a$ na $(-3,1]$, $(1-\delta, 1+\delta)$ a $[1+\delta, 4)$ a tedy (podobně jako v (iii)) $a_n \rightrightarrows a$ na $(-3,4)$.

To ale není možné, protože $\sup_{x \in (-3,4)} |a_n(x) - a(x)| = \infty$, $n \in \mathbb{N}$.

Tvrzení tedy neplatí

(V) volme $\varepsilon > 0$, potom

$a_n \rightrightarrows a$ na $(-3,4)$

$\Rightarrow \exists N_1 \ \forall x \in (-3,4) \ \forall n \in \mathbb{N} \ n \geq N_1 : |a_n(x) - a(x)| < \varepsilon$

$b_n \rightrightarrows b$ na $(-3,4)$

$\Rightarrow \exists N_2 \ \forall x \in (-3,4) \ \forall n \in \mathbb{N} \ n \geq N_2 : |a_n(x) - a(x)| < \varepsilon$

Tedy pro $N = \max(N_1, N_2)$ platí

$$\forall x \in (-3,4) \ \forall n \in \mathbb{N} \ n \geq N : |a_n(x) + b_n(x) - (a(x) + b(x))| < 2\varepsilon$$

Tvrzení tedy platí

(Vi) volme $a_n = \frac{1}{n}$ a $b_n = \frac{1}{x-4}$ $n \in \mathbb{N}$.

Potom $a_n \rightrightarrows 0$ $b_n \rightrightarrows \frac{1}{x-4}$ na $(-3,4)$,

ale $a_n \cdot b_n = \frac{1}{n(x-4)} \not\rightrightarrows 0$ na $(-3,4)$

Tvrzení tedy neplatí.

(vii) volme $a_n = 1$, $b_n = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $x \in (-3,4)$, $n \in \mathbb{N}$

potom $b_n \to 0$ na $(-3,4)$, $|b_n| \leq \frac{1}{2} < a_n$ $x \in (-3,4)$,

ale není pravda, že $b_n \rightrightarrows 0$ na $(-3,4)$, protože

$\sup_{x \in (-3,4)} |b_n(x)| \geq b_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$ $n \in \mathbb{N}$.

Tvrzení tedy neplatí.

3d Volme $A_n = \{2n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Potom $\bigcup A_n$ je nekonečná (množina všech sudých čísel), a $\mathbb{N} \setminus (\bigcup A_n)$ je rovněž nekonečná (množina všech lichých čísel). Tedy $\bigcup A_n \notin \Sigma$, Σ není σ-algebra a $(\mathbb{N}, \Sigma)$ není měřitelný prostor.